J. Rafelski

1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523706_0037

Selbstkonsistente Vielteilchengleichungen für Elektronen und Muonen und ihre Effekte in muonischen Atomen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

von
Johann Rafelski
aus Krakau/Polen

Frankfurt am Main
Februar 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

Dekan:	Prof. W. Jung
Leiter der Arbeit:	Prof.Dr. W. Greiner
Erstgutachter:	Prof.Dr. W. Greiner
Zweitgutachter:	Prof.Dr. R. Dreizler

Tag der mündlichen Prüfung: 19.2.73

Inhaltsverzeichnis

	Abstract	1
I.	Einführung	2
II.	Herleitung der Feldgleichungen	4
III.	Die selbstkonsistenten klassischen Gleichungen	9
IV.	Iteration der Elektron-Muon-Wechselwirkung	16
V.	Berechnung von neuen Effekten in muonischen Atomen	21
VI.	Vergleich mit dem Experiment	31
VII.	Zusammenfassung	36
	Anhang I Erwartungswert von $j \otimes \psi$	37
	Anhang II Entwicklung der Vakuumpolarisation-Strukturfunktion nach Kugelfunktionen	39
	Literaturverzeichnis	42

Abstract

From the general Lagrangian for electrons, muons and photons a set of coupled single-particle self-consistent equations is derived. The self-consistent terms contain vacuum polarization and self-energy terms and the mutual interaction between electrons and muons. Iterating this interaction we show that the Uehling term of vacuum polarization should be calculated with screened electronic wave functions. We show that this effect cancels the observed discrepancy between theory and experiment in muonic atoms. This proves the proposed self-consistent equations and gives their first application in atomic problems. In addition the usual QED-Lagrangian is confirmed by the new effect. The achieved agreement also confirms that muons obey Fermi statistics.

I. Einführung

In der Literatur findet man bis heute keine zusammenhängende Darstellung eines Vielkörperproblems, an dem verschiedene Sorten von Teilchen gleicher Statistik (z.B. Fermionen) im äußeren Feld beteiligt wären. Andererseits steigt in der letzten Zeit das Interesse an muonischen Atomen (d.h. Atomen, die außer den Elektronen ein Muon gebunden haben) beträchtlich. Dies ist in der Tatsache begründet, daß die experimentelle Genauigkeit so weit fortgeschritten ist, daß quantitative Aussagen über spezielle Beiträge zur Bindungsenergie in höherer Ordnung in den Feinstrukturkonstanten erwartet werden können.

Insbesondere wurden kürzlich mehrere Experimente durchgeführt, die Abweichungen zu den vorliegenden theoretischen Voraussagen gebracht haben. Da es hier um einen höchst präzisen Test der Quantenelektrodynamik (QED) geht, ist es von eminenter Wichtigkeit, diese Abweichungen zu deuten. Zu bedenken ist, daß hier so wichtige Fragen im Spiel sind, wie z.B.: Woher kommt die anormale Masse des Muons; welcher Statistik genügen die Muonen, kommutieren die Muonen- und Elektronen-Feldoperatoren?

In dieser Arbeit wollen wir auf der Basis der QED bleiben. Wir werden mit der exakten Lagrangefunktion der Elektronen, Muonen und Photonen beginnen und über die Feldgleichungen auf klassische Einteilchengleichungen kommen. Anschließend führen wir die Quantisierung der Fermionenfelder im Ortsraum aus. Da es sich in Wirklichkeit um eine strenge Vielteilchentheorie handelt, werden die Einteilchengleichungen zugleich alle unbesetzten (virtuellen) Zustände erfassen. Solche selbst-konsistenten Gleichungen stellen eine Erweiterung der Hartree-Fock Gleichungen dar und umfassen die Vielteilcheneffekte, die heute unter dem Namen Vakuumpolarisation, Selbstenergie, Vertexkorrekturen etc. bekannt sind. Den ersten Schritt in dieser Richtung machten Reinhard, Arenhövel und Greiner[1,2,3] . Sie beschränkten sich dabei auf eine Sorte von Fermionen, die Elektronen. Mit Hilfe einer neuen Ableitung werden wir analoge Gleichungen für das gekoppelte System von Muonen und

Elektronen ableiten. Es wird sich zeigen, daß diese exakte Behandlung der QED hinreichend ist, um die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment in muonischen Atomen herzustellen.

II. Herleitung der Feldgleichungen

Wir beginnen mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{oe} + \mathcal{L}_{om} + \mathcal{L}_{oEM} + e j_{e\alpha} A^{\alpha} + e j_{m\alpha} A^{\alpha} + e j_{ex\alpha} A_{\alpha} , \qquad (1)$$

dabei sind die L_o's die gewöhnlchen Lagrangefunktionen für freie Elektronen (e), Muonen (m) und die Photonen (EM). Ferner werden die gewöhnlichen Stromoperatoren[4] verwendet

$$j_{\alpha} = \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \gamma_{\alpha} \Psi - \bar{\Psi}^{c} \gamma_{\alpha} \Psi^{c}) , \qquad (2)$$

c deutet hier die Ladungskonjugation an. Beachtenswert ist

$$j_{\alpha} = \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \gamma_{\alpha} \Psi - \Psi \gamma_{\alpha}^{T} \bar{\Psi}) . \qquad (3)$$

Der Term mit dem externen Strom j_{ex} stellt sicher, daß eine äußere Ladungsdichte, die nicht quantisiert wird, mit in der Wechselwirkung erscheint. Ein solcher Fall ist in der Atomphysik durch die Kernladungsdichte gegeben. Eine Quantisierung wird immer dann keine Rolle spielen, wenn die innere Struktur der Quelle physikalisch irrelevant ist; in diesem Fall der mikroskopische Aufbau der Kerne etc. - Es ist hinreichend, eine mittlere "externe" Ladungsverteilung vorzugeben. Die Bewegungsgleichungen, die wir aus (1) erhalten, sind wohlbekannt

$$[(\not{\partial} - e\not{A}) - m_e] \Psi_e = 0 \qquad (a) \qquad (4)$$

$$[(\not{\partial} - e\not{A}) - m_m] \Psi_m = 0 \qquad (b)$$

$$\partial^{\alpha} F_{\beta\alpha} = e(j_e + j_m + j_{ex})_{\beta} \qquad (c)$$

mit $F_{\beta\alpha} = A_{\alpha|\beta} - A_{\beta|\alpha}$.

Eine Lösung von (c) ist gegeben durch (wenn das Photonenfeld nicht quantisiert ist)*

$$A^{\alpha}(x) = e\int D^{-\alpha\beta}(x-y)\,(j_e + j_m + j_{ex})_\beta\, d^4y \qquad (5)$$

Dabei ist $D^-(x-y)$ der retardierte Photonen-Propagator. In der Lorentzeichung haben wir

$$D_L^{-\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)}\, \frac{g^{\alpha\beta}}{p^2} \qquad (6)$$

Der Integrationsweg liegt oberhalb der reellen p_o-Achse.
Die Lösung in der transversalen Eichung wird z.B. von Björken-Drell[5] angegeben und ist bis auf die unwesentlichen Terme

$$D_T^{-\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)}\, \frac{n_\alpha n_\beta}{(kn)^2 - k^2} = -g_{\alpha o}\, g_{\beta o}\, \frac{\delta(t_x - t_y)}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \qquad (7)$$

in dem Koordinatensystem mit $n^\alpha = (1,0,0,0)$. Gleichung (5) kann in zwei Anteile zerlegt werden, wobei der erste die Effekte des klassischen äußeren Feldes beschreibt, d.h.

$$A^{\alpha}(x) = A^{\alpha}_{ex}(x) + e\int D^{-\alpha\beta}(x-y)\,(j_e + j_m)_\beta\, d^4y\,. \qquad (8)$$

Einsetzen von (8) in die Gl.(4) liefert die gekoppelten Elektronen-Muonen Gleichungen

$$(\not{p} - e\not{A}_{ex} - m_e)\,\psi_e(x) - e^2\gamma_\alpha \int D^{-\alpha\beta}(x-y)\,(j_e(y) + j_m(y))_\beta\, \psi_e(x)\, d^4y = 0 \qquad (9a)$$

$$(\not{p} - e\not{A}_{ex} - m_m)\,\psi_m(x) - e^2\gamma_\alpha \int D^{-\alpha\beta}(x-y)\,(j_m(y) + j_e(y))_\beta\, \psi_m(x)\, d^4y = 0\,, \qquad (9b)$$

* Damit werden die Effekte weggelassen, die aus gleichzeitiger Anwesenheit von mehr als einem Photon entstehen (siehe Ref.8).

mit dem Operator j wie er durch Gl.(2,3) definiert wurde. Gleichungen (9a,9b) beschreiben exakt das System der Elektronen-Muonen in einem äußeren Potential $\mathcal{H}_{ex}$. Um Einteilchengleichungen zu erhalten, müssen wir die Elektronen-und Muonenzustandsoperatoren ψ näher spezifizieren. Bisher war es üblich, solche Quantisierungsvorschriften im Impulsraum durchzuführen (mit Ausnahme des Lehrbuches von Jauch-Rohrlich, Ref. 4)). Wir werden zeigen, daß der Ortsraum ein besseres Verständnis der Gegebenheiten in sich birgt. Wir lassen uns dabei von der Dirac'schen Vorstellung der Löcher-Theorie leiten: Alle Zustände negativer Energie sind besetzt. Nach Feynman heißt es: Die Positronenzustände positiver Energie sind unbesetzt. Unser Zustand ψ wird also die Form haben

$$\psi_\alpha(x) = \sum_q b_q \phi_{q\alpha}(\vec{x}, E_q) e^{-itE_q} + \sum_{q'} d^+_{q'} \phi_{q'\alpha}(\vec{x}, -E_{q'}) e^{itE_{q'}}$$

$$\bar{\psi}_\alpha(x) = \sum_q b^+_q \bar{\phi}_{q\alpha}(\vec{x}, E_q) e^{itE_q} + \sum_{q'} d_{q'} \bar{\phi}_{q'\alpha}(\vec{x}, -E_{q'}) e^{-itE_{q'}} \qquad (10)$$

$$E_q > 0,$$

dabei sind $b^+(d^+)$ die Erzeugungsoperatoren der Elektronen (Positron) und b(d) sind analog Vernichtungsoperatoren (siehe dazu Björken-Drell [5]). ϕ_q sind die klassischen Einteilchen-Wellenfunktionen, d.h. es sind Eigenlösungen einer Bewegungsgleichung, die z.B. in elektrostatischen äußeren Potentialen erzeugt werden. Die Summe über q kann über ein Kontinuum führen. Die b^+, b,d^+,d Operatoren genügen folgenden Antikommutationsbeziehungen

$$\{b_q, b^+_{q'}\} = \delta_{qq'}$$

$$\{d_q, d^+_{q'}\} = \delta_{qq'}. \qquad (11)$$

Allen anderen Antikommutatoren verschwinden. Mit dieser Annahme wird erst das Fermionenfeld quantisiert.

Damit läßt sich sofort der Antikommutator $\{\psi_\alpha(\vec{x},t),\ \psi_\alpha(\vec{x}',t')\}$ bestimmen:

$$\{\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(x')\} = \sum_{qq'} \{b_q, b_{q'}^+\}\,\phi_{q\alpha}(\vec{x},E_q)\,\phi_{q'\beta}(\vec{x}',E_{q'})\,e^{-itE_q}e^{it'E_{q'}}$$

$$+\sum_{qq'} \{d_q, d_{q'}^+\}\,\phi_{q\alpha}(\vec{x},-E_q)\,\phi_{q'\alpha}(\vec{x}',-E_{q'})\,e^{itE_q}e^{-it'E_{q'}} + \ldots\{b_q,d_q\}\ldots$$

$$+\ldots\{b_q^+,d_q\}\ldots+\ldots\{b_q,d_q^+\}\ldots+\ldots\{b_q^+,d_q^+\}\ldots\ .$$

Wir sehen, daß wegen (11) für t=t' nur die beiden ersten Terme beitragen können. Es folgt dann direkt

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t),\psi_\beta^+(\vec{x}',t)\} = \sum_q \phi_{q\alpha}(\vec{x},E_q)\,\phi_{q\beta}^+(\vec{x}',E_q) + \sum_{q'} \phi_{q'\alpha}(\vec{x},-E_{q'})\,\phi_{q'\alpha}^+(\vec{x}',-E_{q'}).$$

Wegen der Vollständigkeit unserer Eigenlösungen ϕ_q erhalten wir deshalb

$$\{\psi_\alpha(x,t),\bar{\psi}_\beta(x',t)\} = \delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\gamma^0_{\alpha\beta}\ . \tag{12}$$

Somit ist auch festgelegt, wie die Lösungen ϕ zu normieren sind

$$\langle\phi_q|\phi_{q'}\rangle = \delta_{qq'}\ . \tag{13}$$

Es sollte darauf hingewiesen werden, daß der allgemeine Antikommutator

$$\{\Psi(x), \bar{\Psi}(x')\} = \sum_q \phi_q(\vec{x}, E_q)\, \bar{\phi}_q(\vec{x}', E_q)\, e^{-iE_q(t-t')}$$

$$+ \sum_{q'} \phi_{q'}(\vec{x}, -E_{q'})\, \bar{\phi}_{q'}(\vec{x}', -E_{q'})\, e^{iE_{q'}(t-t')}$$

eine Lorentzinvariante ist, solange die Bestimmungsgleichung für ϕ_q Lorentz-invariant ist. Bei Vorgabe eines äußeren Feldes ist dies nicht mehr der Fall - sogar die Translationsinvarianz ist schon verletzt.

In äußeren Feldern, die diskrete Zustände zwischen +m und -m erzeugen, gehören die unbesetzten Zustände zu der Summe über $+E_q$, die besetzten Zustände zu der Summe über $-E_q$,. Dies entspricht einer Wahl des Grundzustandes (des Vakuums) in der z.B. beim neutralen Atom alle besetzten Zustände zusammen mit - nach Dirac besetzten - Zuständen negativer Energie betrachtet werden. Anders gesprochen: Wir legen die Fermikante zwischen den letzten besetzten und den ersten unbesetzten Zustand. So ist auch die Gleichung (10) zu verstehen

$$\Psi(x) = \sum_{E_q > F} b_q \phi_q(\vec{x}, E_q)\, e^{-itE_q} + \sum_{E_q < F} d_q^+ \phi_q(\vec{x}, E_q)\, e^{-itE_q}$$

$$\bar{\Psi}(x) = \sum_{E_q > F} b_q^+ \bar{\phi}_q(\vec{x}, E_q)\, e^{itE_q} + \sum_{E_q < F} d_q \bar{\phi}(\vec{x}, E_q)\, e^{itE_q} \quad . \qquad (15)$$

Unser Vakuum ist definiert durch

$$b_q|0\rangle = 0 \quad , \quad d_q|0\rangle = 0 \quad , \qquad (16)$$

d.h. das Vakuum enthält keine Elektronen mit E>F und keine Positronen mit E<F.

III. Die selbstkonsistenten klassischen Gleichungen

Um die Einteilchengleichungen aus (9a), (9b) zu erhalten, müssen wir die 1-Teilchen-(bei(9a) Elektron , bei(9b) Muon) Vakuum-Matrixelemente bilden, z.B.:

a) $\langle 0|j_e(y)\,\Psi_e(x)\,b^+_{qe}|0\rangle$, b) $\langle 0|j_m(y)\,\Psi_e(x)\,b^+_{qe}|0\rangle$

und das Gleiche mit vertauschten Indizes m und e.
Beginnen wir mit dem einfacheren Matrixelement b). Wir nehmen wie üblich an, daß die Muonen- und Elektronen- Operatoren vertauschen. Da das Vakuum $|0\rangle$ nun durch

$$b_e|0\rangle = 0 \qquad d_e|0\rangle = 0$$
$$b_m|0\rangle = 0 \qquad d_m|0\rangle = 0 \qquad (17)$$

definiert ist, können wir dies auch als $|0\rangle = |e\rangle \otimes |\mu\rangle$ schreiben. Dabei bedeutet $\otimes$ ein direktes Produkt; $|e\rangle$, ($|m\rangle$) sind, wie in Gleichung (16) definiert, die Elektronen- (Muonen-) Vakua.
Damit ergibt sich für das Matrixelement b)

$$\langle 0|j_m(y)\,\Psi_e(x)\,b^+_{qe}|0\rangle = \langle m|j_m(y)|m\rangle \otimes \langle e|\Psi_e(x)\,b^+_{qe}|e\rangle .$$

Mit

$$\langle j_m\rangle = \tfrac{1}{2}\langle(\bar\Psi_m \gamma \Psi_m) - (\bar\Psi^c_m \gamma \Psi^c_m)\rangle$$

folgt für $\langle j_m\rangle$:

$$\langle\bar\Psi_m \gamma \Psi_m\rangle = \Big\langle \Big| \sum_{\substack{Eq>F\\ Eq'>F}} b^+_q b_{q'}\,\bar\phi_q \gamma \phi_{q'}\, e^{-it(E^m_{q'} - E^m_q)} + \sum_{\substack{Eq<F\\ Eq'<F}} d_q d^+_{q'}\,\bar\phi_q \gamma \phi_q\, e^{-it(E^m_{q'} - E^m_q)} \Big| \Big\rangle + \Big\langle \Big| \sum_{\substack{Eq>F\\ Eq'<F}} b^+_q d^+_{q'} \times$$
$$\times\,\bar\phi_q \gamma \phi_{q'}\, e^{-it(E^m_{q'} - E^m_q)} + \sum_{\substack{Eq<F\\ Eq'>F}} d_q b_{q'}\,\bar\phi_q \gamma \phi_{q'}\, e^{-it(E^m_{q'} - E^m_q)} \Big| \Big\rangle .$$

Wir haben wegen der Vertauschungsrelationen (Gleichung (11)):

$$\langle d_q d^+_{q'}\rangle = \delta_{qq'} .$$

Alle anderen Erwartungswerte verschwinden:

$$\langle m|\bar{\Psi}_m \gamma \Psi_m|m\rangle = \sum_{Eq<F} \bar{\phi}_{qm} \gamma \phi_{qm} .$$

Umgekehrt zählt $\bar{\psi}^c \gamma \psi^c$ die ladungskonjungierten Zustände ab, d. h. wir erhalten zusätzlich den Term

$$\langle m|\bar{\Psi}^c_m \gamma \Psi^c_m|m\rangle = \sum_{Eq>F} \bar{\phi}_{qm} \gamma \phi_{qm} ,$$

also

$$\langle m|j_m|m\rangle = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{Eq<F} \phi_{qm} \gamma \phi_{qm} - \sum_{Eq>F} \phi_{qm} \gamma \phi_{qm}\Big) \qquad (18)$$

$$\equiv \tfrac{1}{2} \sum_{Eq}^{\sim} \bar{\phi}_{qm} \gamma \phi_{qm} .$$

Es wird sich später zeigen, daß der hier definierten Tilde-Summe ($\sum^{\sim}$) wesentliche Bedeutung zukommt.
Zusammengefaßt erhalten wir

$$\langle 0|j_m(y) \Psi_e(x) b^+_{qe}|0\rangle = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{Ep}^{\sim} \bar{\phi}_{pm}(\vec{y}) \gamma \phi_{pm}(\vec{y})\Big) \phi_{qe}(\vec{x}) e^{-it_x E^e_q} . \qquad (19)$$

Das Matrixelement a) ist nicht wesentlich schwieriger, es erfordert jedoch größeren algebraischen Aufwand. Die Rechnung ist im Anhang I durchgeführt. Nach Vernachlässigung der Retardierungsfunktion im Austauschterm ist das Matrixelement a) durch den Ausdruck

$$\langle 0|j_e(y) \Psi_e(x) b^+_{qe}|0\rangle = \tfrac{1}{2} \sum_{Ep}^{\sim} (\bar{\phi}_{ep}(\vec{y}) \gamma \phi_{ep}(\vec{y})) \phi_{qe}(\vec{x}) e^{-it_x E^e_q}$$

$$- \sum_{Ep}^{\sim} (\bar{\phi}_{ep}(\vec{y}) \gamma \phi_{eq}(\vec{y})) \phi_{ep}(\vec{x}) e^{-it_x E^e_q} \qquad (20)$$

gegeben. (Siehe Anhang I.)
Wir erhalten wie gewöhnlich den Direkt- und Austauschterm der Fermionen. Analoge Resultate gelten auch für Muonen nach Vertauschung der Indizes m und e.
Die Beziehung der Tilde-Summe $\sum^{\sim}$ zu der bekannten Hartree-Fock Summe ergibt sich aus der Definition. Es ist nicht schwer einzusehen, daß sich die Tilde-Summe wie folgt zusammensetzt:

$$\sum_{E_p}^{\sim} = 2 \sum_{E_p}^{HF} + \sum_{E_p}^{Uh} \quad . \tag{21}$$

Dabei ist $\overset{HF}{\Sigma}$ die Hartree-Fock Summe, die gewöhnliche Summe über alle besetzten Zustände; die Uehling-Summe $\overset{Uh}{\Sigma}$ bedeutet, daß über alle Energiezustände dem Vorzeichen von E nach summiert wird.*
Dieser Sachverhalt ist nochmals in Fig. 1 dargestellt.

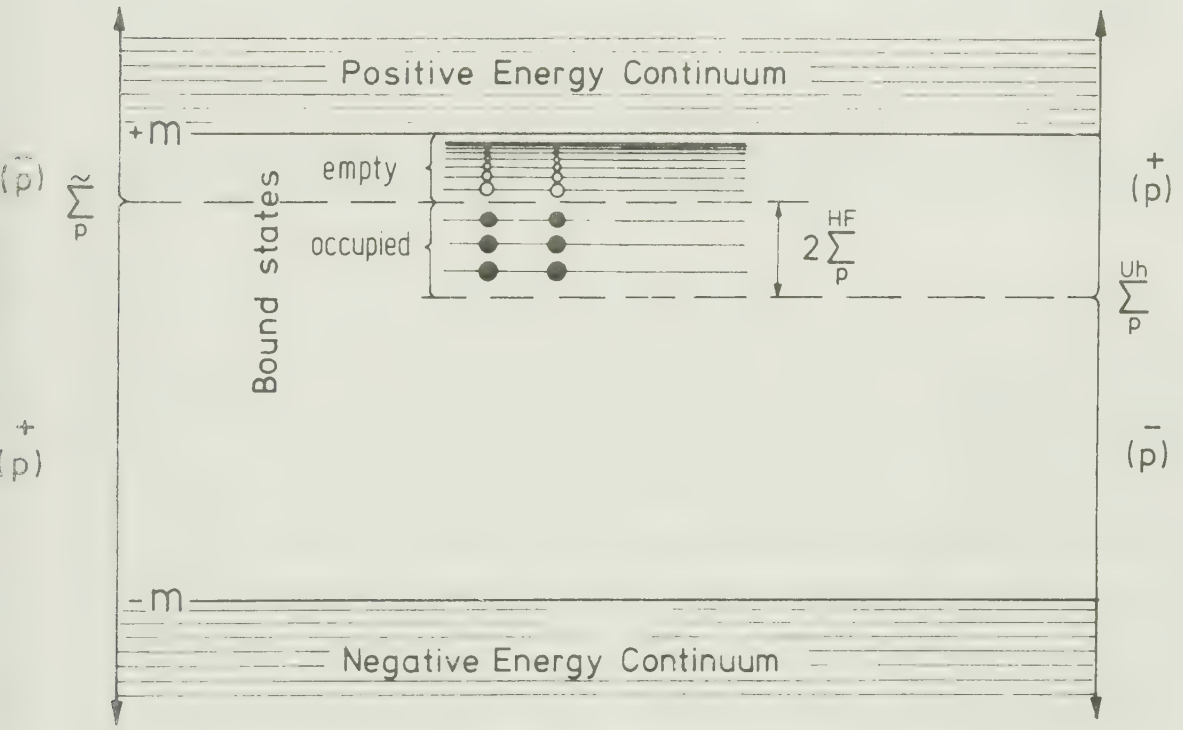


Fig. 1

Mit Hilfe der Zwischenergebnisse (15), (20), (21) können wir aus unseren Feldgleichungen durch Bildung der Vakuum-Einteilchen Matrixelemente die folgenden selbstkonsistenten Gleichungen ableiten (die Muonengleichung ergibt sich aus Vertauschung der Indizes e und m):

---

* Die Zustände negativer Energie werden mit Plus-Vorzeichen und die Zustände positiver Energie werden mit Minus-Vorzeichen summiert.

$$(\not{p} - e\not{A}_{ex} - m_e)\,\phi_{eq}(\vec{x})\,e^{-iE_q^e t_x} + \frac{e^2}{4\pi}\gamma_0 \int \frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \sum_{E_p}^{HF} \Big\{ (\phi_{ep}^+(\vec{y})\,\phi_{ep}(\vec{y}))\,\phi_{eq}(\vec{x})\,e^{-iE_q^e t_x}$$

$$- (\phi_{ep}^+(\vec{y})\,\phi_{eq}(\vec{y}))\,\phi_{ep}(\vec{x}))\,e^{-iE_q^e t_x} \Big\} + \frac{e^2}{8\pi}\gamma_0 \int \frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \sum_{E_p}^{Uh} \Big\{ (\phi_{ep}^+(\vec{y})\,\phi_{ep}(\vec{y})) \qquad (22)$$

$$\times \phi_{eq}(\vec{x})\,e^{-iE_q^e t_x} - (\phi_{ep}^+(\vec{y})\,\phi_{eq}(\vec{y}))\,\phi_{ep}(\vec{x})\,e^{-iE_q^e t_x} \Big\} + \frac{e^2}{4\pi}\gamma_0 \int \frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$\times \Big\{ \sum_{E_p}^{HF} (\phi_{mp}^+(\vec{y})\,\phi_{mp}(\vec{y})\,\phi_{eq}(\vec{x})\,e^{-iE_q^e t_x} + \frac{e^2}{8\pi}\gamma_0 \sum_{E_p}^{Uh} (\phi_{mp}(\vec{y})\,\phi_{mp}(\vec{y}))\,\phi_{eq}(\vec{x})\,e^{-iE_q^e t_x} \Big\} = 0$$

Beachtenswert ist hierbei, daß wir aus (22) bis auf $O(e^4)$* die Hartree-Fock Gleichungen erhalten, die sonst aus Minimalforderungen an die Hamiltonfunktion und die Energie gewonnen werden. Die Diskussion dieses Sachverhalts geht über diese Arbeit hinaus. Es sei nur erwähnt, daß Gl. (22) auch aus einer Minimalforderung an die Lagrange-Funktion abgeleitet wurde, unter Zuhilfenahme von exakten(angezogenen) Vielteilchen-Zuständen Ψ in Gl.(10). (Siehe dazu auch Kelemen[8].)
Die Gleichung für Muonen erhalten wir aus Gl. (22) durch Vertauschung der Indizese und m. Die Bedeutung der einzelnen Beiträge ist klar: Die HF- Summe über die Elektronenzustände stellt die bisher in selbstkonsistenten Rechnungen betrachteten Terme dar, die elektronische Uehling-Summe beschreibt die Vakuumpolarisation (direkter Term) und die Selbstenergie-Korrekturen (Austausch-Term). Diese Terme wurden zuerst in obiger Form von Reinhard et al.[1,2,3] in die selbstkonsistenten Gleichungen aufgenommen. Ihre Effekte auf Übergangsenergien wurden bisher in Störungstheorie berechnet. Zu beachten ist, daß diese Beiträge divergent sind und Renormierungsprozeduren unterliegen[2,3] .

---

* In den Uehlingsummen wird der e^2-proportionale Term zu der Ladungsrenormierung benötigt.

Die muonischen Summen stellen die Effekte der Muonen auf Elektronen dar. Die HF-Summe beschreibt ein Abschirmungspotential, die Uehlingsumme ist die muonische Vakuumpolarisationsdichte. Wegen der großen Masse der Muonen werden die Effekte der muonischen Vakuumpolarisation nur bei Abständen von 1.8fm (Comptonwellenlänge der Muonen) sichtbar. Wir werden uns deshalb bei konkreten Rechnungen auf die muonische HF-Summe konzentrieren.
Wie bereits erwähnt soll unser Potential zeitunabhängig sein. Insbesondere gilt $A_{ex}(x) = \gamma_0 V(r)$, wobei $V(r)$ das Kernpotential ist. Wir können nun in Gleichung (22) die Zeitabhängigkeit abseparieren, dabei erhalten wir einen Satz von selbstkonsistenten Gleichungen für die Eigenlösungen $\phi_q(\vec{x})$.
Die Gl.(22) läßt sich übersichtlicher schreiben, wenn wir folgende Abkürzungen verwenden:

$$\varrho^{e}_{p}(\vec{y},\vec{x})^{m}_{q} = \left\{ \phi^{+}_{ep}(\vec{y})\, \phi_{ep}(\vec{y}) \right\} \phi_{mq}(\vec{x}) \tag{23}$$

$$\sigma^{e}_{p}(\vec{y},\vec{x})^{e}_{q} = \left\{ \phi^{+}_{ep}(\vec{y})\, \phi_{eq}(\vec{y}) \right\} \phi_{ep}(\vec{x}) . \tag{24}$$

und analog für $\varrho^{ee}_{pq}, \varrho^{mm}_{pq}, \varrho^{me}_{pq}$. Die geschweiften Klammern sollen andeuten, daß die eingeschlossenen Ausdrücke Skalare und keine Spinoren sind. Wir erhalten damit

$$(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + eV + \gamma_0 m_e)\,\phi_{eq}(\vec{x}) + \frac{e^2}{8\pi}\int \frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \sum_{E_p}{}^{\sim} \left(\varrho^{e}_{p}(\vec{y},\vec{x})^{e}_{q} - \sigma^{e}_{p}(\vec{y},\vec{x})^{e}_{q} \right.$$

$$\left. + \varrho^{m}_{p}(\vec{y},\vec{x})^{e}_{q} \right) = E^{e}_{q}\, \phi_{eq}(\vec{x}) \tag{25a}$$

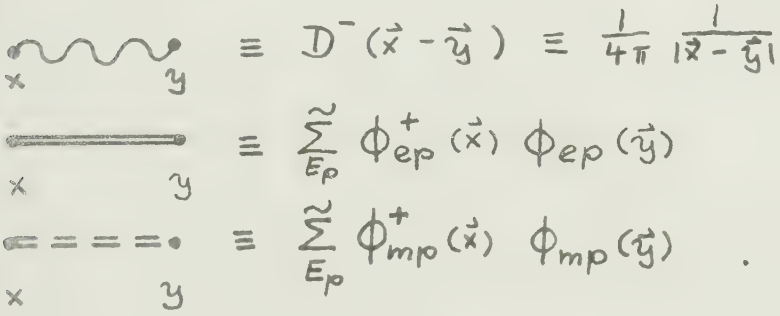
$$(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + eV + \gamma_0 m_m)\,\phi_{mq}(\vec{x}) + \frac{e^2}{8\pi}\int \frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \sum_{E_p}{}^{\sim} \left(\varrho^{m}_{p}(\vec{y},\vec{x})^{m}_{q} - \sigma^{m}_{p}(\vec{y},\vec{x})^{m}_{q} \right.$$

$$\left. + \varrho^{e}_{p}(\vec{y},\vec{x})^{m}_{q} \right) = E^{m}_{q}\, \phi_{mq}(\vec{x}) \tag{25b}$$

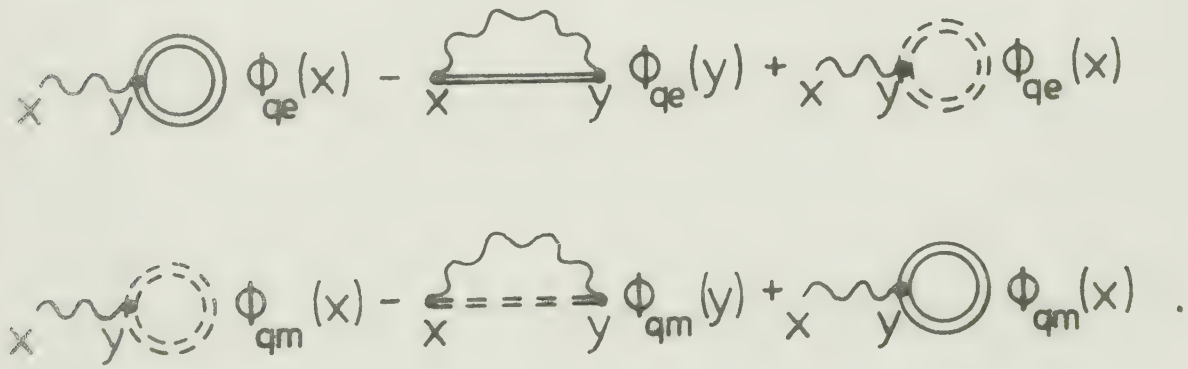
Die Berechnung der ϕ_{mq}, ϕ_{eq} erfolgt wie im bekannten HF-Verfahren mit der Bedingung:

$$\sum_{E_q}^{HF} (E_q^m + E_q^e) = \text{Minimum} \quad . \tag{26}$$

Eine graphische Darstellung der Gleichung(25) ergibt sich mit den Bezeichnungen



Damit können die selbstkonsistenten Terme in Gl.(25a,b) geschrieben werden



Im Feynmanschen Sinne können wir für den exakten Propagator schreiben*

(27a)

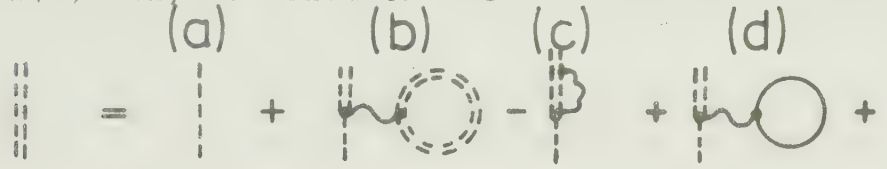
(27b)

*Die Eingangslinien werden einfach gezeichnet, da die Integralgleichung, die die exakte Greensche Funktion beschreibt, die Form $G_{exakt} = G_o + \int G_o \; WW \; G_{exakt}$ hat.

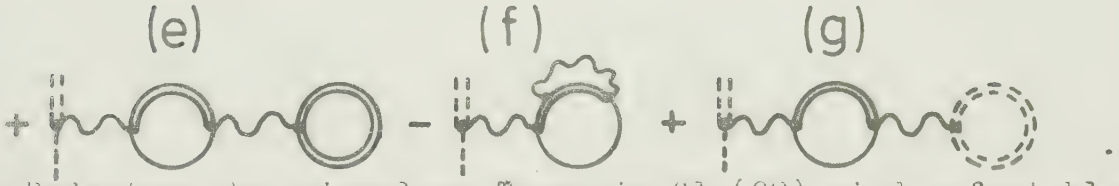
———, ---- stellen die exakten Propagatoren im äußeren Feld dar, und zwar ohne Vielteilcheneffekte, die durch die weiteren Terme beschrieben werden. Einen solchen Satz selbstkonsistenter Gleichungen haben schon Reinhard et al.[1,2,3] für Elektronen-Atome angegeben.

IV. Iteration der Elektron-Muon-Wechselwirkung

Am einfachsten läßt sich die Wechselwirkung zwischen den Gleichungen (25) mit Hilfe der graphischen Darstellung (27) verstehen. Setzen wir Gl.(27a) in den Wechselwirkungsterm der Gl. (27b) ein, so erhalten wir



(28)



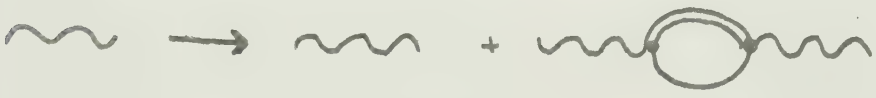
Die Bedeutung der einzelnen Terme in Gl.(28) wird sofort klar, wenn wir in der ersten Näherung die Doppellinien (exakte Propagatoren) durch einfache Linien (Propagatoren im äußeren Feld) ersetzen. Der Graph (a) gibt den Muonen-Propagator im äußeren Feld an und berücksichtigt die Definition der Fermikante.* Die Terme (b), (c) stellen die gewöhnlichen HF-Terme dar. Sie beinhalten ferner die Effekte der Vakuumpolarisation und der Selbstenergie. Der Graph (d) beschreibt die Abschirmungseffekte durch die Elektronen. Der Graph (e) stellt hauptsächlich die Vakuumpolarisation der Elektronen dar, bei der die äußere Quelle die gebundenen Elektronen sind. Graph (f) ist der zu (e) gehörige Austauschgraph.

Graph (g) wurde bisher explizit nicht diskutiert. Er beschreibt die Streuung der Muonen an sich selbst, mittels intermediärer, auch virtueller, Elektronenzustände. Anders ausgedrückt: die Muonenwellenfunktionen müssen unter Berücksichtigung aller Elektronenzustände berechnet werden, die durch sie selbst(Muonen) abgeschirmt werden. In selbstkonsistenten Rechnungen der muonischen Atome wird die Wirkung dieses Termes bei Iteration der besetzten Elektronenzustände berücksichtigt. Die Wechselwirkung mit virtuellen Elektronenzuständen wurde nicht beachtet.

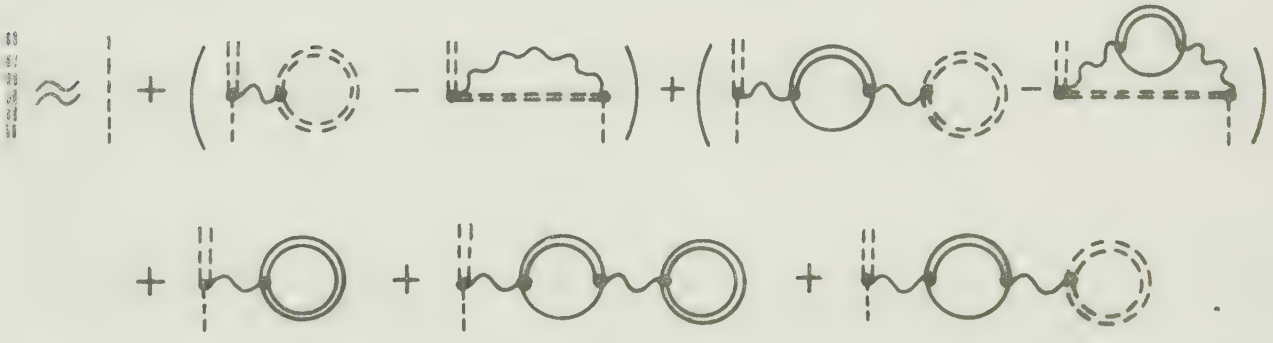
---

* Dies bedeutet, daß die Anwesenheit von reellen Teilchen im äußeren Feld berücksichtigt ist. Deswegen verschwindet z.B. der Graph (d) nicht - in erster Ordnung in α. Er beschreibt die Kopplung an die reellen Elektronenzustände.

Ein solcher Selbstenergieeffekt ist gewöhnlich null, wenn nur eine Sorte von Fermionen beteiligt ist, da er sich gegen den dann dazugehörigen Austauschgraphen aufhebt. Weil jedoch der Austauschterm zwischen Elektronen und Muonen fehlt, fehlt er auch im Endeffekt im Term (g) von Gl.(28).
Einen solchen Graphen erhalten wir nochmal aus der Iteration des Photonenpropagators.
Im äußeren Feld schreiben wir



Aus Gl. (28) erhalten wir nun



(29)

Wir sehen, daß der Direktterm (b) in Gl. (28) nach Photonen-iteration in erster Ordnung mit dem Term (f) in Gl. (28) übereinstimmt. Da aber auch der Austauschgraph (c) iteriert wird, werden die Effekte, die aus der Anwesenheit des Muons im Orbit herrühren, hier exakt weggehoben. Dieser Punkt ist begrifflich sehr wichtig, da man gewöhnlich auch für den Graphen(f) in Gl. (28) einen Austauschgraphen erwarten würde. Graph (f) entstand aber aus der Iteration eines geschlossenen Elektronenpropagators und beinhaltet deswegen keinen Austauschgraphen. Wären Elektronen und Muonen ununterscheidbar, hätten wir jedoch auch hier einen Austauschgraphen erhalten.

In pionischen Atomen würden sich die Graphen aus der Photonen-iteration nicht aufheben, insgesamt dürften wir also einen dreimal größeren Effekt erwarten.

Die Übereinstimmung mit dem Experiment, die wir erzielen werden, zeigt eindeutig, daß Muonen nur der Fermistatistik genügen können.

Wie erwähnt ist ein Teil des Effektes, der durch den Graph(f) in Gl.(28) beschrieben wird, bereits in expliziten Rechnungen der Elektronenabschirmung in muonischen Atomen vorweggenommen. Die Elektronendichte wird nämlich zu einer Kernladung von Z-1 "effektiv" berechnet[6]. Dies bedeutet, das Muon wird von Wellen-funktionen abgeschirmt, die von seiner Anwesenheit im Orbit bereits Kenntnis haben.

Wir wollen nun die vorliegenden Ergebnisse direkt aus den Gleichungen (25) ableiten. Bezeichnen wir mit

$$\frac{e^2}{8\pi}\int\frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\sum_{E_p}{}^{\sim}\,\phi^{+}_{mp}(\vec{y})\,\phi_{mp}(\vec{y}) \equiv e\,V_m \tag{30}$$

und

$$\frac{e^2}{8\pi}\int\frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\sum_{E_p}{}^{\sim}\,\phi_{ep}(\vec{y})\,\phi_{ep}(\vec{y}) \equiv e\,V_e\,, \tag{31}$$

und vernachlässigen wir die Uehling-Summe in Gl.(25b) (d.h. die Vakuumpolarisation durch die Muonen bleibt unberücksichtigt), so erhalten wir mit $V_m \approx 2 \cdot V_m^{HF}$

$$(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+eV+eV_m+m_e)\,\phi_{eq}(\vec{x})+\frac{e^2}{8\pi}\int\frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\sum_{E_p}{}^{\sim}(\varrho^{ee}_{pq}-\sigma^{ee}_{pq})=E^e_q\,\phi_{eq}(\vec{x}) \tag{32a}$$

$$(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+eV+eV_e+m_m)\,\phi_{mq}(\vec{x})+\frac{e^2}{4\pi}\int\frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\sum^{HF}(\varrho^{mm}_{pq}-\sigma^{mm}_{pq})=E^m_q\,\phi_{mq}(\vec{x}). \tag{32b}$$

Bisher wurden nur Einmuonenatome untersucht; es besteht eine

äußerst geringe Wahrscheinlichkeit, daß man in absehbarer Zukunft Zweimuonenatome beobachten kann. Deshalb können wir die HF-Summe in der Muonengleichung weglassen. Aus der Definition (30) wird dann nach Vernachlässigung der muonischen Vakuumpolarisation

$$eV_m = \frac{e^2}{4\pi}\int\frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\phi_{mq'}(\vec{y})\,\phi_{mq'}(\vec{y}) \equiv e\,V_m^{q'}, \tag{33}$$

wobei q' der vom Muon zum gegebenen Zeitpunkt besetzte Zustand ist.

Sei $\phi^{\circ}_{mq'}$ der Muonenzustand, wie er ohne Wechselwirkung mit Elektronenzuständen entstanden wäre. Das dazugehörige Potential ist

$$eV_m^{\circ\,q'} \equiv \frac{e^2}{4\pi}\int\frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\phi^{\circ+}_{mq'}(\vec{y})\,\phi^{\circ}_{mq'}(\vec{y}). \tag{34}$$

Ferner sei ϕ°_{eq} der Elektronenzustand ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung mit Muonen:

$$eV_e^{\circ} \equiv \frac{e^2}{8\pi}\int\frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\tilde{\sum_{E_p}}\,\phi^{\circ+}_{ep}(\vec{y})\,\phi^{\circ}_{ep}(\vec{y}). \tag{35}$$

Diese beiden Potentiale verändern die Eigenenergien der Elektronen- und Muonenzustände. Dieser Effekt ist quantitativ von Fricke[6] untersucht worden.

Wichtig für uns ist jedoch die nächste Approximation, d.h. die Elektronenwellenfunktionen berechnet unter der Anwesenheit des Muons im bestimmten Orbit q'. Mit diesen Wellenfunktionen gehen wir dann in die Muonengleichung (32b) ein. Wir setzen dort das Potential

$$eV_e^{1} = \frac{e^2}{4\pi}\sum_{E_p}^{HF}\int\frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\phi^{1}_{pe}(\vec{y})\,\phi^{1}_{pe}(\vec{y}) + \frac{e^2}{8\pi}\sum_{E_p}^{4h}\int\frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\phi^{1+}_{pe}(\vec{y})\,\phi^{1}_{pe}(\vec{y}) \tag{36}$$

ein.

Die Rechnungen von Vogel[7] zeigen, daß der Einfluß höherer Iterationen in besetzten Elektronenzuständen ohne größeren Einfluß auf die HF-Energie ist. Anders verhält es sich mit der Uehling Summe. Wir haben

$$eV^{1un} \equiv \frac{e^2}{8\pi} \sum^{un} \int \frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \phi^1_{pe}(\vec{y}) \phi^1_{pe}(\vec{y})$$

$$= \frac{e^2 r}{4\pi} \int d^3y \, F(\vec{x}-\vec{y}) \, \varrho_{external}(\vec{y}) \,, \tag{37}$$

e_r^2 ist die renormierte Ladung, F die renormierte Uehling-Strukturfunktion und ϱ_{ex} die äußere Ladungsdichte die zur Berechnung von $\phi^1_{pe}(\vec{y})$ verwendet wurde, in diesem Fall also

$$\varrho_{ex} = \varrho_{Nukleus} + \varrho^0_m \,. \tag{38}$$

Gewöhnlich wurde nur ϱ_{Nuk} betrachtet. Es ergibt sich demzufolge eine zusätzliche Korrektur zum Potential, die zur Bestimmung muonischer Zustände herangezogen werden muß.

$$eV_e^{corr} = \frac{e^2}{4\pi} \int d^3y \, F(\vec{x}-\vec{y}) \, \phi^{o+}_{mq}(\vec{y}) \, \phi^{o+}_{mq}(\vec{y}) \tag{39}$$

Im nächsten Kapitel wollen wir diesen Ausdruck näher betrachten und seinen Einfluß auf die Muonenbahnen untersuchen. Auf die Renormierungsprobleme wollen wir hier nicht eingehen. Für unsere Zwecke ist es hinreichend, die Ladung wie bei der Berechnung des Uehling-Potentials als renormiert zu betrachten. Darüber hinaus sei auf die Arbeiten von Reinhard et al.[1,2,3] und Kelemen[8] verwiesen.

V. Berechnung von neuen Effekten in muonischen Atomen

Mit Gl. (37) erhalten wir einen Zusatzterm zur Vakuumpolarisation (Gl.(39)). Die Energien muonischer Zustände werden demnach verändert

$$\Delta E_q^m = \langle \phi_{mq} | e V_e^{corr} | \phi_{mq} \rangle \,, \tag{40}$$

d.h. wenn wir mit ausreichender Genauigkeit ϕ_m° verwenden

$$\Delta E_q^m = \frac{e^2}{4\pi} \int d^3r\, d^3r'\, F(\vec{r}-\vec{r}') \left(\phi_{mq}^{\circ +}(\vec{r}) \phi_{mq}^{\circ}(\vec{r})\right)\left(\phi_{mq}^{\circ +}(\vec{r}') \phi_{mq}^{\circ}(\vec{r}')\right) . \tag{41}$$

Die Funktion $F(\vec{r}-\vec{r}')$ wurde zuerst von Uehling berechnet. Wir verwenden hier die Darstellung von Schwinger[10,12]

$$F(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{Z_0(|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \,, \tag{42}$$

mit der Strukturfunktion

$$Z_n(|\vec{r}|) = \int_1^\infty e^{-2/\chi_e |\vec{r}| \xi} \left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2} \frac{1}{\xi^n} d\xi \,. \tag{43}$$

Das Vorzeichen der Gl. (41) ist entgegengesetzt dem Vorzeichen der normalen Vakuumpolarisation. Dies kommt vom umgekehrten Vorzeichen der Muonenladung verglichen mit der Kernladung. Gewöhnlich ist $e_{external} \cdot e_{Teilchen} = -e^2$; bei uns $= +e^2$. Damit wirkt das Potential V_e^{corr} antibindend - die Energieeigenwerte werden verkleinert; mit wachsenden Quantenzahlen wird auch ΔE_q^m kleiner. Die theoretischen Übergangsenergien werden also auch kleiner.

Wir wollen nun die Gleichung (41) über die Raumwinkel integrieren. Dabei geht es zunächst um die Frage, in welchem Zustand befindet sich das Muon bezüglich der z-Komponente des Drehimpulses. Wir wollen uns hier auf die einfachste statistische 1/(21+1)-Verteilung beschränken. Das heißt, wir nehmen an:

$$\Delta \bar{E}^{m}_{nj} = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{\mu=-j}^{+j} \Delta E^{m}_{nj\mu} \tag{44}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit soll nicht von μ abhängen.

Wir müssen die Mittelung (44) nach der Winkelintegration von (41) durchführen. Betrachten wir folgende Entwicklung

$$\frac{Z_0(|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_1^\infty \left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell(\xi; r, r') P_\ell(\cos\gamma)\, d\xi , \tag{45}$$

wobei γ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r},\vec{r}'$ ist. Die Entwicklungskoeffizienten sind im Anhang II, Gl.(II8) angegeben. Mit Hilfe des Winkeladditionstheorems der Kugelfunktionen können wir auch schreiben

$$\frac{Z_0(|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_1^\infty \left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=\ell'}^{+\ell'} \times \tag{46}$$

$$\times \frac{4\pi}{2\ell+1} A_{\ell'}(\xi; r, r') Y_{\ell' m'}(Q', \varphi') Y_{\ell' m'}(Q', \varphi')\, d\xi .$$

Für die nicht sehr relativistischen Muonenwellenfunktionen können wir die Schrödingerform

$$\phi^{m}_{n\ell m} = f_{n\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \tag{47}$$

annehmen.

Unter Berücksichtigung von

$$\int d\Omega\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\, Y_{\ell' m'}(Q\varphi) = (2\ell+1) \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell\ell\ell' \\ 000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell\ell\ell' \\ mm m' \end{pmatrix} \tag{48}$$

(siehe z.B. Edmonds[13]) erhalten wir für die Winkelintegration von Gl. (41) folgendes Ergebnis:

$$\Delta \bar{E}_{n\ell}^{m} = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \int_0^\infty dr' r'^2 f_{n\ell}^2(r') \int dr\, r^2 f_{n\ell}^2(r)$$

$$\times \frac{e^2}{4\pi} \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{+\ell'} \frac{4\pi}{(2\ell'+1)} A_{\ell'}(\xi; r, r')$$

$$\times (-)^{m'} (2\ell+1)^2 \frac{2\ell'+1}{4\pi} \begin{pmatrix} \ell & \ell & \ell' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \ell & \ell & \ell' \\ -m & m-m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell & \ell' \\ -m & m & m' \end{pmatrix} . \qquad (49)$$

Die 3-j Symbole in Gl. (49) verschwinden nur dann nicht, wenn $m' = 0$, und $\ell' \in (2\ell, 0)$. Da für $2\ell+\ell'$ ungerade

$$\begin{pmatrix} \ell & \ell & \ell' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

können wir $\ell' = 2k$ setzen und erhalten unter Verwendung der Beziehung

$$\sum_{m=-\ell}^{+\ell} \begin{pmatrix} \ell & \ell & \ell' \\ -m & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell & \ell' \\ -m & m & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\ell'+1} \delta(\ell\ell\ell').$$

$$\Delta \bar{E}_{n\ell}^{m} = \int_0^\infty dr' \; f_{n\ell}(r') dr\, r^2 f_{n\ell}(r) \frac{e^2}{4\pi} \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right)$$

$$\times \frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2} \sum_{k=0}^{\ell} A_{2k}(\xi; r, r') \frac{(2\ell+1)}{(4k+1)} \begin{pmatrix} \ell & \ell & 2k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \qquad (50)$$

Wir haben z.B. für $\ell' = 0$ und $\ell' = 2$:

$$\begin{pmatrix} \ell & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2\ell+1}$$

$$\begin{pmatrix} \ell & \ell & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{(2\ell+3)(2\ell+1)(2\ell-1)} \approx \frac{1}{4} \frac{1}{2\ell+1} \qquad (51)$$

Nach der Definition der Entwicklung (45) gilt (siehe AnhangII):

$$\frac{e^{-\frac{2}{\lambda}\xi|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{\ell'=0}^{\infty} A_{\ell'}(\xi; r, r') P_{\ell'}(\cos\gamma) . \qquad (52)$$

Die Orthogonalität der P_1 - Funktionen liefert

$$A_\ell(\xi;r,r') = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{+1} dx\, P_\ell(x)\, \frac{e^{-\frac{2}{\pi}\xi\sqrt{r^2+r'^2-2rr'x}}}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'x}} \qquad (53)$$

Insbesondere erhalten wir

$$A_0(\xi;r,r') = \frac{1}{2}\,\frac{1}{rr'}\,\frac{\pi}{2\xi}\left(e^{-\frac{2}{\pi}\xi|r-r'|} - e^{-\frac{2}{\pi}\xi|r+r'|}\right) \qquad (54)$$

in Übereinstimmung mit Fricke[12]. Dort wurde die Entwicklung wegen der Kugelsymmetrie der Ladungsverteilung nur auf A_0 beschränkt.

Im Anhang II befindet sich die vollständige Integration der Gleichung (53). Das Ergebnis ist (Gl.II4):

$$\frac{e^{-\frac{2}{\pi}\xi|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{rr'}}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,P_\ell(\cos\gamma)$$

$$\times\begin{cases} I_{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\xi r\right)\,K_{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\xi r'\right) & \text{für } r'\geq r \\ I_{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\xi r'\right)\,K_{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\xi r\right) & \text{für } r'\leq r \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{rr'}}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,P_\ell(\cos\gamma)\,I_{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\xi r_<\right)K_{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\xi r_>\right). \qquad (55)$$

Damit folgt für A_ℓ

$$A_\ell(\xi;r,r') = \frac{2\ell+1}{\sqrt{rr'}}\,I_{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\xi r_<\right)K_{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\xi r_>\right) \qquad (56)$$

Wir sind nur an Zuständen in muonischen Atomen mit $l \leq 4$ interessiert. Nach Gleichung (50) benötigen wir deswegen A_0, A_2, A_4, A_6, A_8. Unter Verwendung von

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/z}\;I_{\frac{5}{2}}(z) = \left(\frac{3}{z^3}+\frac{1}{2}\right)\sinh z - \frac{3}{z^2}\cosh z$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/z}\;K_{\frac{5}{2}}(z) = \left(\tfrac{1}{2}\pi/z\right)e^{-z}\left(1+3/z+3/z^2\right) \qquad (57)$$

können wir A_2 sofort berechnen. Betrachten wir die Terme in (57) mit der kleinsten Potenz von z im Nenner etwas genauer:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/2}\; I^k_{5/2}(z) \equiv \frac{\sinh z}{z}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/2}\; K^k_{5/2}(z) \equiv (\tfrac{1}{2}\pi/2)\, e^{-z} \qquad (58)$$

Die Gleichung (58) gilt allgemeiner, insbesondere können wir 5/2 durch $2\ell + 1/2$ ersetzen! Wir erhalten dann bis auf die Terme in höherer Potenz in $\frac{\chi}{2\sqrt{rr'}}\frac{1}{\xi}$:

$$\Pi_{2\ell}(\xi, r, r') \approx \frac{(4\ell+1)}{rr'2\xi}\,\frac{\chi}{2}\left(e^{-\frac{2}{\chi}\xi|r-r'|} - e^{-\frac{2}{\chi}\xi(r+r')}\right) + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right). \qquad (59)$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (50) ergibt sich dann

$$\Delta\bar{E}_{n\ell}{}^{m} \approx \int_0^\infty dr\, dr'\, r'^2\, r^2\, f_{n\ell}^2(r')\,\frac{e^2}{4\pi}\,\frac{2\alpha}{3\pi}\int_1^\infty \left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right)$$

$$\times\frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2}\,\frac{1}{rr'}\,\frac{\chi}{2\xi}\,\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2}{\chi}\xi|r-r'|} - e^{-\frac{2}{\chi}\xi(r+r')}\right)$$

$$\times(2\ell+1)\sum_{k=0}^{\ell}\begin{pmatrix}\ell & \ell & 2k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 \qquad (60)$$

Die Summe über die 3j-Symbole kann für die uns interessierenden Zustände ausgeführt werden. (Zu beachten ist, daß die gewöhnlichen Orthogonalitätsbeziehungen nicht verwendet werden können, da der Vorfaktor $2\ell + 1$ und nicht wie dazu benötigt $4k + 1$ heißt.) Führen wir die Summe aus, so erhalten wir:

$$(2\ell+1)\sum_{k=0}^{\ell}\begin{pmatrix}\ell & \ell & 2k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{cases} 1 & \ell=0 \\ 1+\frac{2}{5} & \ell=1 \\ 1+\frac{2}{7}+\frac{2}{7} & \ell=2 \\ 1+\frac{4}{15}+\frac{2}{11}+\frac{100}{429} & \ell=3 \\ 1+\frac{20}{77}+\frac{162}{1001}+\frac{20}{143}+\frac{490}{2431} & \ell=4 \end{cases}$$

also

$$(2\ell+1)\sum_{k=0}^{\ell}\begin{pmatrix}\ell & \ell & 2k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{cases} 1 \text{ für} & \ell=0 \\ 1{,}4 & \ell=1 \\ 1{,}57 & \ell=2 \\ 1{,}68 & \ell=3 \\ 1{,}76 & \ell=4 \end{cases} \qquad (61)$$

Wir sehen, daß schon eine approximative Mitnahme der Effekte, die durch nicht zentralsymmetrische Ladungsverteilung verursacht werden, die Wechselwirkung um 70% verstärkt. Hätten wir nicht die Formel (44) verwendet, sondern über magnetische Quantenzahlen vor der Integration gemittelt, wären diese Effekte nicht entstanden.

Wir wollen nun die Gültigkeit der Approximation (Gl.(59)) etwas genauer betrachten. Setzen wir die exakte Formel (56) in die exakte Gleichung (50) ein, so erhalten wir

$$\Delta \bar{E}_{ne}^{m} = \frac{e^2}{4\pi}\,\frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^\infty dr\,dr'\,f_{ne}^2\,r^2\,f_{ne}^2\,r'^2\int_1^\infty d\xi\left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right)\frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{rr'}}\sum_{k=0}^{\ell}(2\ell+1)\begin{pmatrix}\ell & \ell & 2k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} I_{2k+\frac{1}{2}}\left(\tfrac{2}{\lambda}\xi r_<\right) K_{2k+\frac{1}{2}}\left(\tfrac{2}{\lambda}\xi r_>\right)$$

(62)

Die $I_{n+1/2}$ -modifizierten Bessel Funktionen haben die Form

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/z}\; I_{n+\frac{1}{2}} = g_n(z)\,\frac{\sinh z}{z} + g_{n-1}(z)\,\frac{\cosh z}{z} \tag{63}$$

Dabei sind die $g_n(z)$ Polynome in $1/z$, die man aus der Rekursionsbeziehung

$$g_{n-1}(z) - g_{n+1}(z) = (2n+1)\,z^{-1}\,g_n(z) \tag{64}$$

und

$$g_0(z) = 1 \quad , \quad g_1(z) = -z^{-1}$$

berechnen kann. Ähnliches Verhalten haben wir bei den $K_{n+1/2}$-Funktionen

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/z}\; K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \left(\tfrac{1}{2}\pi/z\right)e^{-z}\,P_n(z)\,. \tag{65}$$

Die $p_n(z)$ sind durch die Rekursionsbeziehung

$$P_{n-1}(z) - P_{n+1}(z) = -(2n+1)\, z^{-1} P_n(z)$$

(66)

und

$$P_0 = 1 \,, \quad P_1(z) = 1 + z^{-1}$$

bestimmt.

Damit können wir schreiben

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{\pi/2z}\; I_{n+\frac{1}{2}}(z)\sqrt{\pi/2z'}\; K_{n+\frac{1}{2}}(z') =$$

$$= g_n(z) P_n(z') \frac{\sinh z\, e^{-z'}}{z z'} + g_{-n-1}(z) P_n(z') \frac{\cosh z\, e^{-z'}}{z z'}$$

(67)

unter Beachtung von

$$\left.\begin{array}{ll} r' \geq r & \sinh(r) e^{-r'} \\ r' \leq r & \sinh(r') e^{r} \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left(e^{-|r'-r|} - e^{-(r'+r)}\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll} r' \geq r & \cosh(r) e^{-r'} \\ r' \leq r & \cosh(r') e^{-r} \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left(e^{-|r'-r|} + e^{-(r'+r)}\right)$$

(68)

heißt der exakte Ausdruck (Gl.(62))

$$\Delta \bar{E}_{ne}^{m} = \frac{e^2}{4\pi}\,\frac{2\alpha}{3\pi}\,\frac{\lambda}{2}\,\frac{1}{2}\int_0^\infty dr\,dr'\,f_{ne}^2\,r^2\,f_{ne}^2\,r'^2 \int_1^\infty d\xi\,(1+\tfrac{1}{2\xi^2})\,\frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^3}$$

$$\times \frac{1}{r\,r'}\Big[\Big(e^{-(|r'-r|)\xi\frac{2}{\lambda}} - e^{-(r'+r)\xi\frac{2}{\lambda}}\Big) \sum_{k=0}^{\ell} (2\ell+1) \begin{pmatrix} \ell & \ell & 2k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} g_{2k}(r\xi\tfrac{2}{\lambda})\,P_{2k}(r'\xi\tfrac{2}{\lambda}) \\ g_{2k}(r'\xi\tfrac{2}{\lambda}\;\; P_{2k}(r\xi\tfrac{2}{\lambda}) \end{matrix} \right\} + \Big(e^{-|r'-r|\xi\frac{2}{\lambda}} + e^{-(r'+r)\xi\frac{2}{\lambda}}\Big)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\ell} (2\ell+1) \begin{pmatrix} \ell\ell & 2k \\ 00 & 0 \end{pmatrix}^2 \left\{ \begin{matrix} g_{-2k-1}(r\xi\tfrac{2}{\lambda})\,P_{2k}(r'\xi\tfrac{2}{\lambda}) \\ g_{-2k-1}(r'\xi\tfrac{2}{\lambda})\,P_{2k}(r\xi\tfrac{2}{\lambda}) \end{matrix} \right. \begin{matrix} r<r' \\ r>r' \end{matrix} \Big] \qquad (69)$$

Für $\ell=0$ erhalten wir den bisherigen Ausdruck Gl.(54), da $g_{-1}=0$.

Aus der Struktur des ξ-Integrals ergibt sich eindeutig, daß von den Polynomen g,p nur die ersten Glieder dominant beitragen. Jedes zusätzliche $1/\xi$ verkleinert den Integranden, der Faktor $\lambda/2r$ ($\approx$ 2 in uns interessierenden Fällen) kann dieses Verhalten nicht umkehren. Aus diesem Grunde ist die von uns durchgeführte Approximation (Gl.(60),(61)) weitgehend dem Sachverhalt entsprechend.

Bei der heutigen Experimentiergenauigkeit ist keine weitere Untersuchung nötig, jedoch sollten in naher Zukunft mit relativistischen Wellenfunktionen und den exakten Gl.(69) die Feinstruktureffekte untersucht werden. Die nötigen Integrationen der Gl.(60) wurden numerisch durchgeführt. Als radiale Wellenfunktionen wurden die Radialanteile der Diracwellenfunktionen zum ausgedehnten Kern

eingesetzt. Aus diese Weise werden die relativistischen Effekte teilweise in die Rechnung aufgenommen. Da die Feinstrukturaufspaltung für die weiter zu untersuchenden Zustände klein ist, haben wir die Winkelabhängigkeit bei der einfachen $Y_{\ell m}$-Abhägigkeit belassen. Andererseits hätten wir von den relativistischen Spinoren $\chi^{\varkappa}(\Omega)$ nur eine kompliziertere 3-j Summe in Gl.(63) erhalten.

VI. Vergleich mit dem Experiment

Die Bohrschen Bahnen der Muonenatome befinden sich wegen der 206-mal größeren Masse wesentlich näher am Atomkern als die Elektronenbahnen. Man kann sogar viele muonische Zustände finden, die genau zwischen den Elektronenwellen und dem Atomkern lokalisiert sind. Die Bindungsenergien solcher "äußerer" (z.B. 3d, 4f, 5g etc.) Zustände sind dann nur sehr schwach von der prinzipiell nicht bekannten Form des Kernes und dem jeweiligen Elektronenbesetzungszustand abhängig, sodaß die theoretischen Voraussagen unabhängig von irgendwelchen Parametern sind. Das Experiment wurde von zwei Gruppen durchgeführt. Nachdem Dixit et al.[15] eine Diskrepanz zur theoretischen Voraussage festgestellt haben, wurde bei anderen Kernen das Experiment von Walter et al.[16] wiederholt. Auch sie fanden den gleichen Typ von Diskrepanz.

Die theoretischen Übergangsenergien werden überwiegend durch die Coulombenergie, d.h. durch die Energien des Coulombpotentials der Kerne bestimmt. Als Korrektur wird dann Vakuumpolarisation 1. Ordnung in $\alpha(\alpha Z)$ berücksichtigt (ca. 0.5% Effekt), sowie Effekte höherer Ordnung wie Vakuumpolarisation[17] der Ordnungen $\alpha^2(Z\alpha)$, $\alpha^2(Z\alpha)$, $\alpha(Z\alpha)^3$. Ferner wird die Elektronenabschirmung[6] berücksichtigt. Kürzlich erschienen sogar quantitative Resultate bezüglich der $\alpha(Z\alpha)^5$ und $\alpha(Z\alpha)^7$-Ordnung Vakuumpolarisation[18]. In der Tabelle 1 sind diejenigen Zustände gelistet, bei denen nach vorliegenden Experimenten die erwähnte Diskrepanz beobachtet wurde.

Die theoretischen Übergangsenergien berücksichtigen die neuesten Ergebnisse von Sudaresan[17] und Blomqvist[18]. In der letzten Zeile ist die Differenz der beiden Ergebnisse aufgezeichnet. Die Fehler der theoretischen Voraussagen betragen ca. 8 eV. Sie kommen aus der Unkenntnis der Masse des Muons und den Feinstrukturkonstanten, sowie aus der Unsicherheit in der Auswertung der Korrekturen $\alpha(Z\alpha)^5$, $\alpha(Z\alpha)^7$. Die benutzten Naturkonstanten sind

$$m_{muon} = 105.6599 \text{ MeV}$$
$$\alpha = 1/137.03602 \quad .$$

TABELLE I

Vergleich theoretischer und experimenteller Übergangsenergien in muonischen Atomen. Theoretische Werte schließen Vakuumpolarisation der Ordnung $\alpha(Z\alpha)$, $\alpha^2(Z\alpha)$, $\alpha(Z\alpha)^3$, $\alpha(Z\alpha)^5$, $\alpha(Z\alpha)^7$, endliche Kernausdehnung, Selbstenergie, Elektronenabschirmung, Kernpolarisation, relativistische Korrekturen zur reduzierten Masse ein.

Z	Transition	E_{th}(KeV)	E_{exp}(KeV)	$E_{th}-E_{exp}$(eV)
$_{47}Ag$	$4f_{5/2}-3d_{3/2}$	308.460	308.428 ± 0.019	32 ± 19
	$4f_{7/2}-3d_{5/2}$	304.777	304.759 ± 0.017	18 ± 17
$_{48}Cd$	$4f_{5/2}-3d_{3/2}$	321.993	321.973 ± 0.018	20 ± 18
	$4f_{7/2}-3d_{5/2}$	317.986	317.977 ± 0.017	9 ± 17
$_{50}Sn$	$4f_{5/2}-3d_{3/2}$	349.978	349.953 ± 0.020	25 ± 20
	$4f_{7/2}-3d_{5/2}$	345.253	345.226 ± 0.018	27 ± 18
$_{56}Ba$	$4f_{5/2}-3d_{3/2}$	441.359	441.299 ± 0.021	60 ± 21
	$4f_{7/2}-3d_{5/2}$	433.903	433.829 ± 0.019	73 ± 19
	$5g_{7/2}-4f_{5/2}$	201.279	201.260 ± 0.016	19 ± 16
	$5g_{9/2}-4f_{7/2}$	199.912	199.902 ± 0.015	10 ± 15
$_{80}Hg$	$5g_{7/2}-4f_{5/2}$	416.141	416.087 ± 0.023	54 ± 23
	$5g_{9/2}-4f_{7/2}$	410.337	410.284 ± 0.024	53 ± 24
$_{81}Tl$	$5g_{7/2}-4f_{5/2}$	426.874	426.828 ± 0.025	46 ± 25
	$5g_{9/2}-4f_{7/2}$	420.770	420.717 ± 0.023	53 ± 23
$_{82}Pb$	$5g_{7/2}-4f_{5/2}$	437.749	437.687 ± 0.020	62 ± 20
	$5g_{9/2}-4f_{7/2}$	431.337	431.285 ± 0.017	52 ± 17

In Tabelle 2 sind die Resultate von Rechnungen - wie im vorigen Kapitel ausgeführt - dargestellt. Wir erzielen vollständige Übereinstimmung mit dem Experiment. Dies wird in Fig. 2 demonstriert. In Fig. 2a) wird die Diskrepanz in eV gezeigt wie sie bisher bestand. Die Kreuze zeigen die neuen Beiträge an. Darunter zum Vergleich die Differenz Theorie - Experiment, wobei der neue Effekt bereits berücksichtigt wurde.

Bemerkenswert ist noch der Übergang 4f-3d in Pb, der auch in Tabelle 2 gezeigt wurde: Da der Effekt sehr stark ist, (130 eV), muß man ihn ohne Zweifel im Experiment gut sehen. Den Einfluß der endlichen Kernausdehnung auf den Übergang hat man auf ± 40 eV im Griff. Wenn also ein Experiment auf ± 40 eV gemacht werden kann, hätte man die deutlichste Abweichung in diesem Übergang finden müssen. Die Übergangsenergie $4f_{5/2}$-$3d_{3/2}$ liegt bei 965.117 keV (ohne Vakuumpolarisation) (bzw. 932.092 keV für $4f_{7/2}$-$3d_{5/2}$). Es wurde Fermiladungsverteilung angenommen mit dem Äquivalentradius von 7.10 fm. Dieser Wert wurde aus den inneren Übergängen gewonnen und ist auf zwei Stellen hinter dem Komma gesichert[19]. Bei Verkleinerung des Äquivalentradiuses um 0.05 fm ergibt sich ein Effekt von 80 eV für $4f_{5/2}$-$3d_{3/2}$ und 35 eV für $4f_{7/2}$-$3d_{5/2}$.

In Tabelle 2 ist auch der Einfluß des Effekts auf den 1s-Zustand gezeigt. Da die Ungenauigkeit in der Bestimmung der Kernpolarisation und die Unsicherheit über Kernladungsverteilung zusammen etwa 3 keV beträgt, besteht kein Widerspruch zum Experiment. In künftigen Bestimmungen der Kernladungsparameter muß man jedoch diesen Effekt berücksichtigen.

Wir sehen, daß uns nur die sorgfältige Auswertung der Vielteilchen Muonen-Elektronengleichungen zur Übereinstimmung mit dem Experiment führen kann. Muonenselbstwechselwirkung über besetzte Elektronenzustände wurde bereits berücksichtigt, indem die Abschirmungseffekte der Elektronen im wesentlichen mit den Elektronenwellenfunktionen zu Z-1 berechnet wurden[6]. Der Abschirmungseffekt von 70 eV ist durchaus vergleichbar mit der virtuellen Abschirmung von 40 eV.

TABELLE 2

Effekte der Muon Selbstwechselwirkung über die intermediären Elektron-Positron Zustände. Die Werte sind über Feinstrukturzustände gemittelt.

	4f(eV)	3d(eV)	4f-3d(eV	Abweichung aus Tab. 1	Theorie-Experiment	1s(keV)
$_{47}Ag$	18	56	38	20±18	-18±18	1.16
$_{48}Cd$	19	58	39	15±18	-24±18	1.18
$_{50}Sn$	21	62	41	26±19	-15±19	1.25
$_{56}Ba$	27	83	56	69±20	+13±20	1.39
$_{82}Pb$	63	195	132	-		1.89
	5g(eV)	4f(eV)	5g-4f			
$_{56}Ba$	10	27	17	15±15	-2±15	1.39
$_{80}Hg$	22	61	39	53±23	+14±23	1.84
$_{81}Tl$	23	63	40	50±24	+10±24	1.87
$_{82}Pb$	25	65	40	57±19	+17±19	1.89

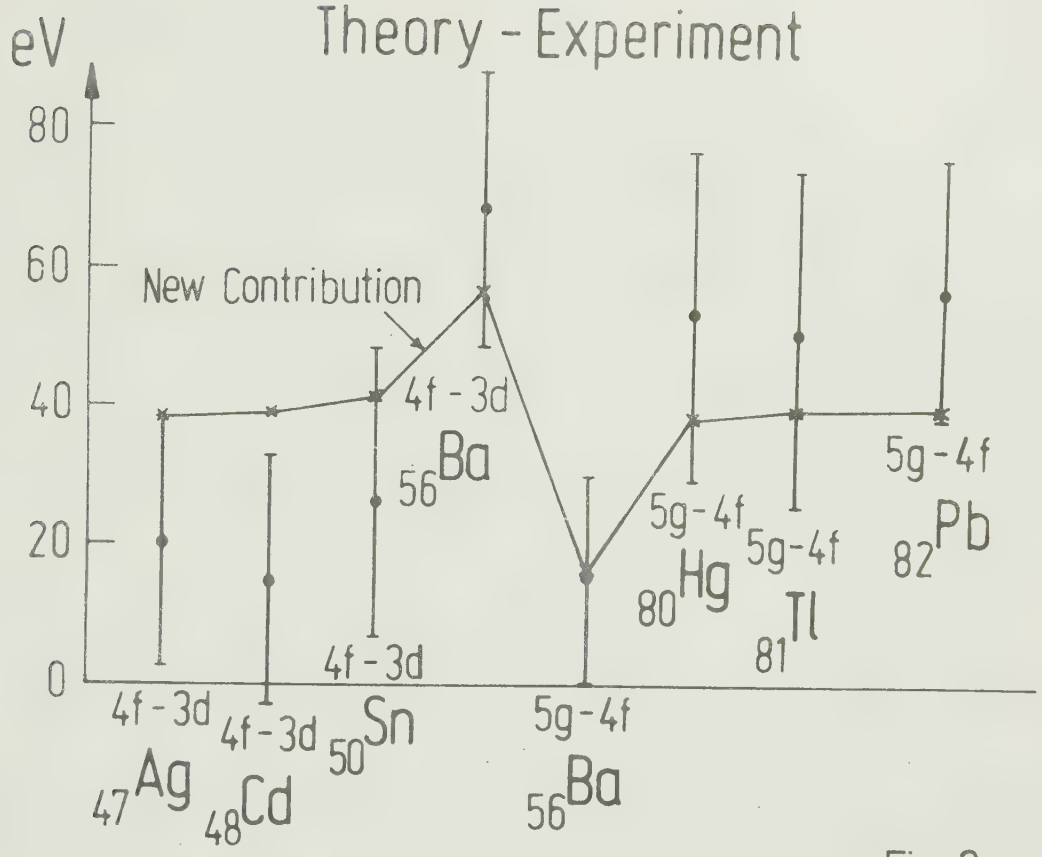

Theory - Experiment
eV
80
60
40
20
0
New Contribution
4f - 3d
56Ba
5g - 4f
80Hg
5g - 4f
81Tl
5g - 4f
82Pb
4f - 3d
4f - 3d
4f - 3d
47Ag
48Cd
50Sn
5g - 4f
56Ba

Fig. 2a

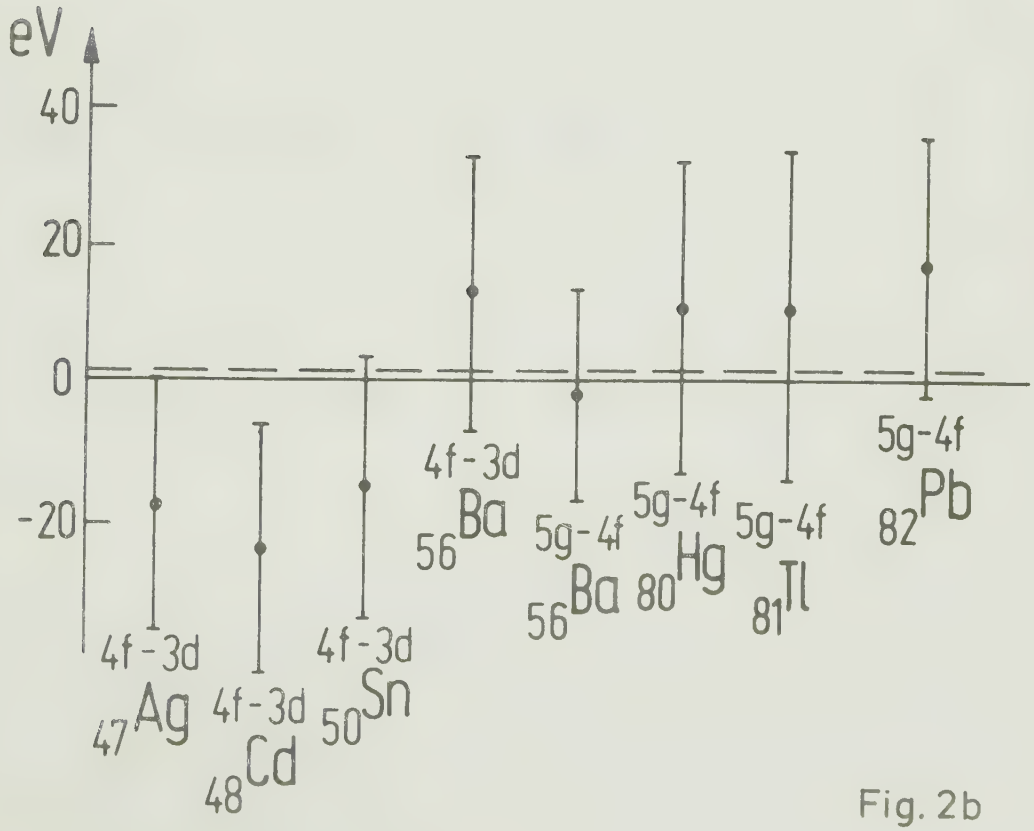

eV
40
20
0
-20
4f - 3d
47Ag
4f - 3d
48Cd
4f - 3d
50Sn
4f - 3d
56Ba
5g - 4f
56Ba
5g - 4f
80Hg
5g - 4f
81Tl
5g - 4f
82Pb

Fig. 2b

7. Zusammenfassung

Mit relativ einfachen Mitteln ist es uns gelungen einen Satz selbstkonsistenter Gleichungen für Muonen und Elektronen direkt aus der allgemeinen Lagrangefunktion der QED abzuleiten. Diese Gleichungen beinhalten alle Vielteilcheneffekte, die in einem System zweier verschiedener Sorten von Fermionen eine Rolle spielen. Es stellte sich heraus, daß die Abweichung zwischen alter Theorie und Experiment in muonischen Atomen darauf beruhte, daß in die bisherigen selbstkonsistenten Rechnungen nur die Abschirmungseffekte der reellen Teilchen berücksichtigt wurden. Es ist eine neue und wesentliche Erkenntnis, daß auch die virtuellen Zustände abgeschirmt werden. Wir haben dann gezeigt, daß auf diese Art und Weise das Muon auf sich selbst einwirken kann. Dies ist ein grundlegend neuer Effekt (an dem zwei Sorten von Teilchen beteiligt sein müssen), da in Systemen von gleichen Fermionen die Selbstwechselwirkung immer durch den Austauschgraphen exakt aufgehoben wird. Die sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment bestätigt damit auch die Lagrangefunktion der QED, da unsere Gleichungen daraus gewonnen wurden. Ferner wird damit bestätigt, daß Muonen der Fermistatistik genügen. Dadurch hebt der Austauschgraph in Gl.(29) einen Direktgraphen auf. Würden die Muonen der Bosestatistik genügen, hätten wir einen dreimal höheren theoretischen Beitrag erhalten.

Anhang I Erwartungswert von $j \otimes \Psi$

Das Matrixelement

$$\langle 0|j_e(y)\Psi_e(x)b_{qe}^+|0\rangle = \langle e|j_e(y)\Psi_e(x)b_{qe}^+|e\rangle = \tag{I.1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle e|\bar{\Psi}_e(y)\gamma\Psi_e|y)\Psi_e(x)\,b_{qe}^+|e\rangle - \langle e|\bar{\Psi}_e^c(y)\gamma\Psi_e^c(y)\Psi_e(x)\,b_{qe}^+|e\rangle\right.$$

ergibt nach Einsetzen der Entwicklung (15) für Ψ (wir lassen nun den Index e einfachheitshalber fort)

$$\langle|\bar{\Psi}(y)\gamma\Psi(y)\Psi(x)b_q^+|\rangle = \langle|\Big[\sum_{\substack{E_p>F\\E_{p'}>F}} b_p^+ b_{p'}\bar{\phi}_p(\vec{y})\gamma\phi_{p'}(\vec{y})\,e^{-it_y(E_{p'}-E_p)}$$

$$+\sum_{\substack{E_p<F\\E_{p'}<F}} d_p d_{p'}^+\bar{\phi}_p(\vec{y})\gamma\phi_{p'}(\vec{y})\,e^{-it_y(E_{p'}-E_p)} + \sum_{\substack{E_p>F\\E_{p'}<F}} b_p^+ d_{p'}^+\bar{\phi}_p(\vec{y})\gamma\phi_{p'}(\vec{y})\times$$

$$\times e^{-it(E_{p'}-E_p)} + \sum_{\substack{E_p<F\\E_{p'}>F}} d_p b_{p'}\bar{\phi}_p(\vec{y})\gamma\phi_{p'}(\vec{y})\,e^{-it_y(E_{p'}-E_p)}\Big]\times$$

$$\Big[\underline{\sum_{K>F} b_k\phi_k(\vec{x})\,e^{-it_x E_k}} + \underline{\sum_{K<F} d_k^+\phi_k(\vec{x})\,e^{-it_x E_k}}\Big]b_q^+|\rangle$$

Der einfach unterstrichene Term liefert den gewöhnlichen Direktterm des Stromes $\sum_{E_p<F}\phi_p(\vec{y})\gamma\phi_p(\vec{y})\phi_q(\vec{x})\,e^{-it_x E_q}$ wegen $b_k b_q^+ = \delta_{kq} - b_q^+ b_k$ und $b_k|\rangle = 0$ (und genauso für d, d^+). Der zweifach unterstrichene Term kann zusammen mit b^+ nur von einem Zwei-Teilchen Vernichter aufgehoben werden, also ist nur der Term

$$\langle e|\sum_{\substack{E_p<F\\E_{p'}>F}}\sum_{K<F} d_p b_{p'}\bar{\phi}_p(\vec{y})\gamma\phi_{p'}(\vec{y})\,d_k^+\phi_k(\vec{x})\,b_q^+\,e^{-it_y(E_{p'}-E_p)}\,e^{-it_x E_k}|e\rangle \tag{I.2}$$

interessant.

$b_{p'}$ kommutiert mit d_k^+ und liefert mit b_q^+ gerade $\delta_{qp'}$. Analog liefert $a_p a_k^+$ ein δ_{pk} . Wir erhalten den Austauschterm. Ähnlich

$$\sum_{E_p<F} \bar{\phi}_p(\vec{y})\,\gamma\,\phi_q(\vec{y})\,\phi_p(\vec{x})\; e^{-i(t_y-t_x)(E_p-E_q)}\; e^{-iE_q t_x} \qquad \text{(I.3)}$$

ergibt sich der Anteil für $p > F$ aus Ψ_e^c . Der Faktor $e^{i(t_y-t_x)(E_q-E_p)}$ ist die Retardierungsfunktion, die beim Austauschgraphen immer auftritt. Wir benötigen für weitere Untersuchungen den Ausdruck $\int d^4y \bar{D}(y-x) \times$Austauschterm$(y,x)$. Der retardierte Photonenpropagator kann aus Gl.(6) gewonnen werden und ist

$$D^{-\alpha\beta}(y-x) = -g_{\alpha 0}\, g_{\beta 0}\, \frac{\delta(t_x - t_y - |x-y|)}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{y}|} \quad .$$

Wir integrieren den Austauschterm über die Zeit t_y:

$$\gamma_\alpha \int D^{-\alpha\beta}(y-x)\,\tfrac{1}{2} \sum_{E_p}^{\sim} \bar{\phi}_p(y)\,\gamma_\beta\,\phi_q(y)\,\phi_p(x)\; e^{-i(t_y-t_x)(E_q-E_p)}\; e^{-iE_q t_x} \qquad \text{(I.4)}$$

$$= -\int d^3x \Big\{ \frac{1}{8\pi}\,\gamma_0 \sum_{E_p}^{\sim} \phi_p^+(\vec{y})\,\phi_q(y)\,\phi_p(x)\; \frac{e^{i|\vec{x}-\vec{y}|(E_q-E_p)}}{|\vec{x}-\vec{y}|}\; e^{-iE_q t_x} \Big\} \quad .$$

Für $|x-y|(E_q - E_p) \to 0$ erhalten wir den klassischen Austauschterm. In diesem Fall sind die Retardierungseffekte vernachlässigt.

Wir können Gl.(I4) mit dem Ausdruck von Reinhard et al.[2], Gl. (10b) ff vergleichen. Dort wurde die Retardierungsfunktion aus den Schwingergleichungen abgeleitet. Sie lautet dort:

$$F_R(|x-z|, E_p - E_q, sg(p)) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq' \; \frac{\sin(q'|x-z|)\, sg(p)}{sg(p)(E_p-E_q)+(q'-i\alpha)} \qquad \text{(I.5)}$$

$$sg(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } E_p > F \\ 0 & \text{für } E_p < F \end{cases}$$

Unsere Retardierungsfunktion ist gegeben durch

$$F(|x-z|, E_p - E_q) = e^{i|x-y|(E_q-E_p)}$$

$$= i\sin|\vec{x}-\vec{y}|(E_q-E_p) + \cos|\vec{x}-\vec{y}|\,(E_q-E_p) \quad . \qquad \text{(I.6)}$$

Mit Hilfe der Formel

$$\frac{1}{x-x_0-i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x-x_0}\right) - i\pi\,\delta(x-x_0) \tag{I.7}$$

kann Gl.(I6) auch geschrieben werden als

$$F(|x-z|, E_p-E_q) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i|x-y|q'}}{q'-(E_q-E_p)-i\varepsilon}\,dq' - \frac{i}{\pi}P\int\frac{e^{i|x-y|q'}}{q-(E_q-E_p)}\,dq \tag{I.8}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin|x-y|q'}{q'-(E_q-E_p)-i\varepsilon}\,dq' + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos|x-y|q'}{q'-(E_q-E_p)-i\varepsilon}\,dq' - \frac{i}{\pi}P\int\frac{e^{i|x-y|q'}}{q'(E_q-E_p)}\,dq'.$$

wir sehen, daß der erste Term mit Gl.(I5) identisch ist. Andererseits fehlen die beiden letzten Terme, die durchaus nicht verschwinden. Wir verwenden unser Resultat (Gl.(I5)) für die Retardierungsfunktion.*

Anhang II Entwicklung der Vakuumpolarisation-Strukturfunktion nach Kugelfunktionen

Die Vakuumpolarisation wird mit Hilfe der Strukturfunktion Z_0 beschrieben (siehe Gl.(42),(43)). Wir erwarten folgende Entwicklung:

$$\frac{Z_0(|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_1^\infty\left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right)\frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell(\xi,r,r')P_\ell(\cos\gamma)\,d\xi \tag{II.1}$$

$$= \int_1^\infty\left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right)\frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{+\ell}\frac{4\pi}{2\ell+1}A_\ell(\xi,r,r')Y^*_{\ell m}(\Omega'\varphi')Y_{\ell m}(\Omega\varphi)\,d\xi$$

Dabei ist γ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}'$. Nach Definition der Entwicklung soll gelten:

$$\frac{e^{-\frac{2}{\lambda}\xi|r-r'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{\ell'=0}^{\infty}A_{\ell'}(\xi,r,r')P_{\ell'}(\cos\gamma)\,. \tag{II.2}$$

*Es gelang uns bisher nicht, die Ursache dieses Unterschieds zu klären. In dieser Arbeit wird kein Austauschterm ausgerechnet, sodaß dieses prinzipielle Problem zunächst nicht gelöst werden mußte.

Die Entwicklung (II2) des Yukawa-Potentials ist ähnlich der bekannten Entwicklung des Coulombpotentials nach Legendrepolynomen. Nach Abramovitz et al. "Handbook of Mathematical Functions" gilt (cf eq.10.2.35):

$$\frac{e^{-a|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{2a}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sqrt{\frac{\pi}{2ar}}\sqrt{\frac{\pi}{2ar'}}\, I_{\ell+\frac{1}{2}}(ar)\, K_{\ell+\frac{1}{2}}(ar')\, P_\ell(\cos\gamma). \tag{II.3}$$

Offensichtlich ist diese Gleichung nicht ganz richtig, da die linke Seite gegen das Vertauschen von r und r' invariant ist, wogegen die rechte Seite es nicht ist. Dieser Fehler befindet sich schon in Watson "Theory of Bessel Functions" cf eq.(11.41-11). Richtig muß Gl.(3) heißen:

$$\frac{e^{-a|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{2a}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sqrt{\frac{\pi}{2ar}}\sqrt{\frac{\pi}{2ar'}}\, P_\ell(\cos\gamma)$$

$$\times \begin{cases} I_{\ell+\frac{1}{2}}(ar)\, K_{\ell+\frac{1}{2}}(ar') & r<r' \\ I_{\ell+\frac{1}{2}}(ar')\, K_{\ell+\frac{1}{2}}(ar) & r>r' \end{cases} \tag{II.4}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sqrt{\frac{\pi}{2ar}}\sqrt{\frac{\pi}{2ar'}}\, P_\ell(\cos\gamma)\, I_{\ell+\frac{1}{2}}(ar_<)\, K_{\ell+\frac{1}{2}}(ar_>).$$

Zu beachten ist: das Argument der I-Funktion ist immer kleiner als das der K-Funktion. Dieses Verhalten wird uns noch öfters begegnen, es kommt aus dem asymptotischen Verhalten von I und K für große Argumente. In Gl.(II4) ist das Produkt der Besselfunktionen immer konvergent. Gl.(II4) kann abgeleitet werden, indem man das Integral

$$A_\ell(\xi, r, r') = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{+1} P_\ell(x)\, \frac{e^{-a\sqrt{r^2+r'^2-2rr'x}}}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'x}}\, dx \tag{II.5}$$

durchführt. Unter Berücksichtigung von

$$\int_{-1}^{+1}(a^2+b^2-2abx)^{-\frac{1}{2}}\sin\left[\lambda(a^2+b^2-2abx)^{\frac{1}{2}}\right]P_n(x)\,dx =$$

$$= \pi(ab)^{-\frac{1}{2}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(a\lambda)\, J_{n+\frac{1}{2}}(b\lambda) \qquad a,b>0 \tag{II.6}$$

$$\int_{-1}^{+1} (a^2+b^2-2abx)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\lambda(a^2+b^2-2abx)^{\frac{1}{2}}\right) P_n(x)\, dx =$$

$$= \pi (ab)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(a\lambda)\, Y_{n+\frac{1}{2}}(b\lambda) \qquad (II.7)$$

$$0 < a < b$$

(Erdelyi et al. "Tables of Integral Transforms", vol.2 p.272, eqs.(11),(12), McGraw-Hill 1954.) ergibt sich:

$$H_\ell(\xi,r,r') = \frac{2\ell+1}{\sqrt{rr'}}\, I_{\ell+\frac{1}{2}}(2r_</\lambda\xi)\, K_{\ell+\frac{1}{2}}(2r_>/\lambda\xi) .$$

Eine alternative Schreibweise ergibt sich aus der Verwendung der Beziehung

$$I_\nu(a) K_\nu(b) = \int_0^\infty J_{2\nu}\left[2(ab)^{\frac{1}{2}}\sinh t\right] e^{-(b-a)\cosh t}\, dt$$

$$\text{für } Re\ \nu > -\tfrac{1}{2},\ Re(b-a) > 0 \qquad (II.8)$$

(Erdelyi et al. "Higher Transcendental Functions", vol.2, p.98, eq.(78), McGraw-Hill 1953.). Mit Gl.(II8) können wir für Gl. (II1) schreiben

$$\frac{Z_0(|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_1^\infty \left(1+\tfrac{1}{2}\xi^2\right) \frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2}\, 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y^*_{\ell m}(Q'\varphi')\, Y_{\ell m}(Q\varphi)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{rr'}}\, I_{\ell+\frac{1}{2}}(2r_</\lambda\xi)\, K_{\ell+\frac{1}{2}}(2r_>/\lambda\xi)\, d\xi . \qquad (II.9)$$

Literaturverzeichnis

1) P.-G. Reinhard, Nuovo-Cim. Lett. I 3 (1970) 313

2) P.-G. Reinhard, W. Greiner und A. Arenhövel, Nucl.Phys. A166 (1971) 173;
L.P. Fulcher und W. Greiner, Nuovo Cim. Lett. 2 (1972) 279

3) P.-G. Reinhard, Dissertation Frankfurt 1970

4) Siehe z.B.: J. Schwinger, Phys.Rev. 82 (1951) 664, oder Lehrbuch von J.M. Jouch und F. Rohrlich "Theory of Photons and Electrons". Addison-Wesley 1955

5) J.D. Bjorken und S.O. Drell "Relativistic Quantum Fields", McGraw-Hill 1965

6) B. Fricke, Nuovo Cim. Lett. I 2 (1969) 859

7) P. Vogel, Caltech Report CALT-63-175

8) A. Kelemen, Dissertation Frankfurt 1971

9) E.A. Uehling, Phys. Rev. 48 (1935) 55

10) J. Schwinger, Phys. Rev. 75 (1949) 651, eq. 2.52, 2.53 ff

11) R.J. McKee, Phys. Rev. 180 (1969) 1139

12) B. Fricke, Z.f. Physik 218 (1969) 495

13) A.R. Edmonds, "Angular Momentum in Quantum Mechanics", Princeton University Press 1957

14) M. Abramowitz et al., "NBS - Handbook of Mathematical Functions"

15) M.S. Dixit, M.C. Anderson et al., Phys. Rev. Lett. 27 (1971) 878

16) M.K. Walter, J.M. Vuilleumier et al., Phys.Lett. 40B (1972) 197

17) M.K. Sundaresan und P.J.S. Watson, Phys.Rev.Lett. 29 (1972) 15 and 29 (1972) 1122

18) J. Blomqvist, Nucl.Phys. B48 (1972) 95

19) G. Soff, private Mitteilung

Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. Walter G r e i n e r bin ich für sein stetiges Interesse an dieser Arbeit und fruchtbaren Diskussionen, in denen viele Probleme geklärt wurden, sehr dankbar.

Mein Dank gilt ferner meinen Kollegen, Herrn Berndt M ü l l e r und Gerhard S o f f, deren Mitarbeit in dem QED-Team mich oft auf den richtigen Weg geführt hat.

Die notwendigen Rechnungen mußten mit Hilfe eines Großcomputers ausgeführt werden. Trotz vieler Ausfallzeiten des Zentralen Recheninstitutes gelang mir die rechtzeitige Fertigstellung der Rechnungen. Dem dazugehörigen Glück sei gedankt.

Für die große Unterstützung bei der Herstellung des Manuskripts danke ich ganz besonders Frau K n o l l e und Frau U t s c h i g. Ich danke ebenfalls Herrn B r o s e für den rechtzeitigen und sauberen Druck der Arbeit.

Meinen Eltern und meiner lieben Freundin Helga B e t z danke ich für ihr Verständnis in den letzten Jahren, das wesentlich zum erfolgreichen Abschluß dieser Arbeit beigetragen hat.

Zum Schluß danke ich allen meinen akademischen Lehrern für ihre Mühe einen Teil des Ganzen mir vermittelt zu haben.

Lebenslauf

Am 19. Mai 1950 wurde ich in Krakau (Polen) geboren. Im Jahre 1955 zog ich nach Warschau, wo ich von 1957 - 1964 die Volksschule besuchte. 1965 kam ich mit meinen Eltern nach Frankfurt/M. Zunächst besuchte ich 9 Monate eine Förderschule und wurde anschließend in das Christian-Wirth-Aufbaugymnasium in Usingen aufgenommen. Ab 1967 war ich im Goethe-Gymnasium in Frankfurt, wo ich 1968 das Abitur bestand. Ab 1968 studiere ich Physik an der Universität Frankfurt. 1969 wurde ich in die Studienstiftung des Deutschen Volkes aufgenommen. Im Juli 1971 bestand ich die Diplomprüfung mit Auszeichnung.

Meine akademischen Lehrer waren: Prof. Walter G r e i n e r, Prof. Erwin S c h o p p e r, Prof. Gottfried K ö t h e, Prof. Werner M a r t i e n s s e n, Dr. Michael D a n o s, Prof. Werner S c h e i d, Prof. Dieter D r e c h s e l, Prof. Reiner D r e i z l e r, Prof. Hermann D i n g e s, Prof. Friedrich S t u m m e l, Prof. Joachim W e i d m a n n, Prof. Karl-H. K ö n i g, Prof. Peter D e m b o w s k i †, Prof. Hermann D ä n z e r, Prof. Reiner B a s s, Prof. Jörg K u m m e r.